Int. J. Solids Structures, 1974, Vol. 10. pp. 821–833. Pergamon Press. Printed in Gt. Britain.

ONDES ACOUSTIQUES DANS UN GUIDE ALEATOIRE

J. F. VERNET
Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique, Paris, France

(*Received* 15 *March* 1973; *revised* 29 *October* 1973)

Résumé—Une onde acoustique longitudinale sinusoïdale en fonction du temps se propage dans une barre élastique dont le coefficient d'élasticité, la mas se spécifique et la section droite sont des fonctions aléatoires le long de l'axe. L'onde se réfléchit partiellement sur les inhomogénéités successives qu'elle rencontre, de sorte que son amplitude diminue en moyenne de façon exponentielle à partir du point d'excitation. Une méthode de calcul du coefficient d'amortissement moyen est donnée, et le résultat est comparé avec des simulations numériques.

Abstract—Harmonic longitudinal acoustical waves are propagated through elastic thin rods whose elastic constant, density and crosssectional area are random functions of distance along the bar from a point of excitation. Partial reflection on successive inhomogeneities reduce the mean amplitude of waves, according to an exponential law, from the point of excitation. A method for calculating the mean damping coefficient is given, and the result is checked against numerical simulations.

INTRODUCTION

Le présent rapport étudie la propagation d'ondes acoustiques longitudinales dans une barre élastique dont les caractéristiques (coefficient d'élasticité, section droite, masse spécifique) varient de façon aléatoire le long de l'axe.

Si l'onde est sinusoïdale en fonction du temps, son amplitude diminue en moyenne de façon exponentielle à partir de l'extrémité de la barre où se fait l'excitation. Cela provient de ce que l'onde se réfléchit partiellement sur chacune des inhomogénéités qu'elle rencontre le long de la barre, de sorte que l'onde transmise est d'autant plus petite que la barre est plus longue. Une barre de longueur infinie est totalement réfléchissante.

Ce résultat a une valeur statistique; il est vrai pour presque toutes les valeurs de la fréquence, mais il est en défaut dans des cas isolés, par exemple lorsque la fréquence est celle d'une vibration libre de la barre.

HYPOTHÈSES GÉNÉRALES

Nous supposons que le mouvement de chaque élément de la barre est purement longitudinal, parallèle à l'axe. Cette condition est difficile à réaliser, car sans précaution particulière, la barre prend une oscillation de flexion, par résonance paramétrique. Pour éviter cet effet parasite, il faut un guide convenable.

Nous supposons en outre que chaque section droite de la barre a un mouvement de translation, c'est-à-dire que tous les points d'une même section ont la même vitesse parallèle à l'axe de la barre. En fait une section comprimée longitudinalement subit une dilatation radiale, perpendiculairement à l'axe (par suite du coefficient de Poisson). Notre hypothèse néglige l'effet de ce mouvement secondaire, ce qui revient à supposer que les longueurs d'onde sont plus grandes que le diamètre de la barre.

Le mouvement d'une section est alors entièrement défini par le déplacement d'un seul point de cette section. Ce déplacement est fonction de l'abcisse de la section, c'est-à-dire de la distance à une extrémité de la barre, mesurée lorsque cette dernière est au repos (Fig. 1).

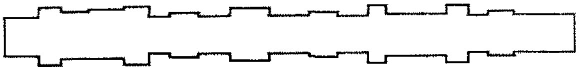

Fig. 1. Épreuve d'une barre aléatoire à section constante par morceaux.

D'autre part le déplacement dépend du temps, c'est une fonction de deux variables: abcisse et temps.

Nous supposons que les caractéristiques mécaniques de la barre au voisinage d'une section sont suffisamment bien définies par le coefficient d'élasticité (module d'Young), la section droite et la masse spécifique au repos. Cela signifie que la barre est un solide élastique linéaire conservatif et de caractéristiques constantes dans le temps. La traction exercée, à travers une section, par la partie de la barre située à droite de la section sur la partie située à gauche est également une fonction de deux variables: abcisse et temps.

Nous supposons que le module d'Young, la section droite et la masse spécifique sont des fonctions discontinues de l'abcisse, et que ces fonctions sont aléatoires: les calculs que nous faisons ne sont pas relatifs à une barre déterminée, mais à un ensemble de barres différentes, de caractéristiques plus ou moins voisines, et définies par une mesure de probabilité donnée.

Nous nous limiterons au cas des ondes harmoniques, c'est-à-dire sinusoïdales en fonction du temps.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

L'état de la barre est défini par deux fonctions (déplacement et traction) de deux variables (abcisse et temps). Ces deux fonctions ne sont pas quelconques, mais satisfont aux deux lois de la mécanique: relation de comportement et équilibre des forces.

La relation de comportement est la loi de Hooke. Elle exprime qu'au voisinage de chaque section droite, la traction est proportionnelle à l'allongement relatif à cet endroit.

L'équilibre des forces peut s'écrire pour le morceau de barre situé entre deux sections infiniment voisines. La force d'inertie est proportionnelle à la dérivée seconde du déplacement par rapport au temps. La force de traction est la différence entre la traction sur la section de droite et la traction sur la section de gauche. Elle est proportionnelle à la dérivée de la traction par rapport à l'abcisse.

Ces deux équations, où le module d'Young et la masse spécifique entrent comme coefficients, jointes aux conditions aux limites, déterminent les deux fonctions des deux variables.

Nous utilisons les notations suivantes:

x	abcisse
$e^{iwt}y(x)$	déplacement
$e^{iwt}F(x)$	traction
$\rho(x)$	masse spécifique
$E(x)$	module d'Young
$S(x)$	aire d'une section droite
t	temps
$w/2\pi$	fréquence.

La relation de comportement s'écrit:

$$F = ES\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

L'équilibre des forces s'écrit:

$$\rho S w^2 y + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = 0.$$

On a ainsi un système de deux équations différentielles linéaires du premier ordre, qu'on peut aussi transformer en une équation du deuxième ordre en éliminant la variable F, ce qui donne:

$$\frac{1}{\rho S}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ES\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + w^2 y = 0.$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

Nous avons obtenu un système du deuxième ordre d'équations différentelles linéaires. La solution de ce système dépend de deux conditions aux limites.

Celles-ci peuvent être la valeur dans une section x_1 de l'amplitude du déplacement y_1 et de sa dérivée $\mathrm{d}y_1/\mathrm{d}x$, ou ce qui revient au même, les valeurs de y_1 et de la force F_1.

L'ensemble de ces deux quantités constitue par définition l'état de le section x_1. Connaissant l'état d'une section quelconque, la solution du système d'équations fournit l'état dans toute autre section, et la relation entre les états de deux sections est linéaire, c'est-à-dire qu'elle est représentée par une matrice. Cette matrice appelée résolvante du système d'équation, ou matrice de transfert, parce qu'elle permet de calculer l'état d'une section à partir de l'état d'une autre section.

Nous appliquons ces considérations générales au cas particulier où les caractéristiques mécaniques de la barre sont constantes par morceaux.

La barre est constituée de morceaux successifs, de longueurs différentes, chacun des morceaux étant homogène. Cela veut dire que le coefficient d'élasticité, la section droite, et la masse spécifique sont indépendants de x dans un morceau, mais peuvent varier d'un morceau à l'autre.

Soient y_1 et F_1 les amplitudes du déplacement et de la traction à une extrémité, y_2 et F_2 à l'autre extrémité d'un morceau. Il y a une relation linéaire entre les conditions aux deux extrémités

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ F_2/w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos kl & \dfrac{1}{\rho S v}\sin kl \\ -\rho S v \sin kl & \cos kl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ F_1/w \end{pmatrix}$$

en posant:

$$\begin{cases} v = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}} & \text{célérité de l'onde dans le morceau} \\ k = \dfrac{w}{v} & \text{nombre d'onde} \\ \quad l & \text{longueur du morceau.} \end{cases}$$

La matrice ci-dessus, qui est par définition la résolvante du système d'équations différentielles, suffit à caractériser le morceau considéré.

L'ensemble de deux morceaux successifs a pour résolvante le produit des matrices des deux morceaux.

On peut ainsi, par des produits de matrices, obtenir la résolvante d'une barre constituée d'un nombre quelconque de morceaux.

Remarquons que la déterminant de la résolvante est égal à l'unité, ce qui correspond à une propriété très générale des systèmes physiques linéaires La résolvante est un élément du groupe spécial linéaire sur l'espace vectoriel à deux dimensions sur le corps des réels (ou groupe SL (2, R), ou groupe des matrices 2×2 à termes réels, et de déterminant unité, ou unimodulaires).

CHOIX DES UNITÉS

Nous allons étudier la résolvante d'une barre aléatoire constituée de morceaux dont les caractéristiques sont tirées au sort indépendamment suivant une certaine mesure de probabilité, qui est la même pour tous les morceaux. Nous pouvons choisir arbitrairement les unités de temps et de masse, ce qui revient à définir des variables sans dimension, bien adaptées pour traiter notre problème.

L'unité de temps la plus naturelle est le temps moyen que met une onde pour parcourir un morceau de barre. Nous désignerons par un crochet la moyenne d'une quantité quelconque pour une mesure de probabilité donnée. L'unité de temps sera la moyenne de $\frac{l}{v}$, soit:

$$\left\langle \frac{l}{v} \right\rangle$$

L'unité de masse peut être choisie de manière que:

$$\langle \rho S v \rangle = 1.$$

On appelle nombre de Kubo [1], le nombre d'ondes moyen par morceau, soit:

$$\langle kl \rangle = w \left\langle \frac{l}{v} \right\rangle.$$

Avec les unités choisies ci-dessus, le nombre de Kubo est égal à la valeur de la pulsation w.

Nous verrons que le comportement de l'onde est différent suivant que le nombre de Kubo est inférieur ou supérieur à l'unité.

PRODUITS DE MATRICES ALÉATOIRES

Une mesure de probabilité fait correspondre, à tout sous-ensemble du groupe $SL(2, R)$, la probabilité pour qu'une matrice tirée au hasard (conformément à cette mesure) appartienne à ce sous-ensemble.

Le mesure de probabilité de la résolvante de chaque morceau étant donnée *a priori*, il s'agit de calculer la mesure de probabilité du produit de ces résolvantes, qui est par définition le produit de convolution des mesures. Ce produit de convolution est une généralisation du produit de convolution bien connu des fonctions de variables réelles.

Le support d'une mesure de probabilité est le plus petit sous-ensemble fermé contenant toute matrice du groupe tirée au hasard conformément à cette mesure. Le produit de deux supports contient l'ensemble de tous les produits des matrices respectivement contenues dans les supports facteurs.

Il est assez intuitif que le support d'un produit de convolution soit le produit des supports, mais cette propriété peut aussi être démontrée [2].

Le produit de convolution de plusieurs mesures identiques est une puissance de convolution. Le support de cette puissance de convolution est contenu dans le sous-groupe engendré par le support initial commun. Par exemple, si le support initial ne contient que des matrices de rotation (sous-groupe orthogonal du groupe $SL(2, R)$), il est évident que le produit de celles-ci sera une matrice de rotation, mais cette rotation pourra être grande même si les rotations initiales sont petites.

Le support d'une puissance de convolution a tendance à diffuser dans tout l'espace qui lui est permis. Une analogie de cette diffusion est le mouvement brownien, où la probabilité de présence d'une particule diffuse dans tout le volume fluide possible.

Si le support initial contient un ouvert d'un groupe connexe, le support de la puissance de convolution diffuse dans le groupe entier lorsque le nombre de matrices augmente.

Or le groupe $SL(2, R)$ n'est pas compact (les termes d'une matrice peuvent devenir infinis tout en satisfaisant à la relation d'unimodularité).

La probabilité pour que la valeur absolue d'un terme soit grande par rapport à l'unité augmente avec le nombre de facteurs dans le produit de matrices aléatoires. Nous allons caractériser cette croissance en choisissant une norme pour la matrice produit, ensuite nous donnerons une interprétation physique.

CHOIX D'UNE NORME

Désignons par:

$$B = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

la résolvante constituée par le produit d'un grand nombre de matrices aléatoire élémentaires, de la forme:

$$\begin{pmatrix} \cos kl & \dfrac{1}{\rho S v} \sin kl \\ -\rho S v \sin kl & \cos kl \end{pmatrix}.$$

En choisissant les unités de façon que la moyenne du coefficient $\rho S v$ soit l'unité, les matrices élémentaires sont presque des matrices de rotation. Si on rallonge une barre en rajoutant un morceau, la matrice B se trouve multipliée (par exemple, à droite) par une matrice qui est presque:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} C_1 \cos\theta - C_2 \sin\theta & C_1 \sin\theta + C_2 \cos\theta \\ C_3 \cos\theta - C_4 \sin\theta & C_3 \sin\theta + C_4 \cos\theta \end{pmatrix}$$

En faisant varier la longueur du morceau rajouté, les termes du haut de la matrice ont une variation sinusoïdale d'amplitude $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ et les termes du bas $\sqrt{C_3^2 + C_4^2}$. On peut caractériser ces amplitudes par leur moyenne quadratique, qui définit une norme pour la matrice B, soit

$$\|B\| = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2}.$$

Cette norme n'est pas modifiée par la multiplication à droite ou à gauche par une matrice de rotation. On pourrait multiplier cette norme par un facteur tel que la norme de la matrice unité soit égale à l'unité, mais ce n'est pas nécessaire pour nos besoins.

En fait, les matrice élémentaires ne sont pas exactement des matrices de rotation, et la norme augmente peu à peu en moyenne quand le nombre de morceaux augmente, conformément à ce qui a été expliqué au paragraphe précédent. Nous allons maintenant donner l'interprétation physique de cette croissance de la norme.

INTERPRETATION PHYSIQUE

Nous affectons maintenant les indices 1 et 2 aux extrémités d'une barre entière, et non plus seulement d'un morceau. La résolvante de cette barre est

$$B = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

et on a les équations

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ F_2/w \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ F_1/w \end{pmatrix}$$

avec la condition

$$C_1 C_4 - C_2 C_3 = 1.$$

Ces équations peuvent se résoudre par rapport aux variables y_1 et y_2, et on obtient

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{C_3} \begin{pmatrix} -C_4 & 1 \\ -1 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{1/w} \\ F_{2/w} \end{pmatrix}.$$

Supposons qu'on impose à la barre les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 \quad \text{donné.} \end{cases}$$

Cela veut dire que l'extrémité d'indice 1 est libre, et que l'extrémité d'indice 2 est excitée par une traction harmonique d'amplitude donnée. On a alors:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{C_1}.$$

Comme le terme C_1 est grand en valeur absolue, l'amplitude de l'onde est plus petite à l'extrémité libre qu'à l'extrémité excitée.

Supposons maintenant qu'on échange les conditions aux deux extrémités:

$$\begin{cases} F_1 \quad \text{donné} \\ F_2 = 0. \end{cases}$$

On obtient: $\dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{1}{C_4}.$

L'onde harmonique est encore amortie à partir de l'extrémité excitée.

La croissance en valeur absolue des termes du produit matriciel B avec le nombre de facteurs correspond à un amortissement de l'onde. L'aspect paradoxal de ce fait provient de ce que la résolvante est la solution mathématique d'un problème de Cauchy avec deux conditions à une même extrémité, alors que le problème physique est un problème de Sturm–Liouville avec une condition à chaque extrémité. Il n'est pas possible physiquement d'imposer à la fois le déplacement et la traction à une même extrémité.

CALCUL DU TAUX MOYEN DE CROISSANCE DE LA NORME DE LA RÉSOLVANTE

Pour ce calcul, nous utilisons la théorie de la représentation des groupes [3].

Considérons un couple de vecteurs:

$$\begin{pmatrix} y_{1a} \\ F_{1a/w} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} y_{1b} \\ F_{1b/w} \end{pmatrix}$$

à l'extrémité 1 d'un morceau de la barre, ainsi que le couple correspondant à l'extrémité 2. Chaque vecteur d'un couple est relié au vecteur correspondant de l'autre couple par une équation faisant intervenir la même matrice B. Les produits tensoriels symétrisés de ces couples de vecteurs sont reliés par une matrice D que l'on peut calculer à partir de B:

$$\begin{pmatrix} y_{2a}y_{2b} \\ \frac{1}{2}(y_{2a}F_{2b/w} + y_{2b}F_{2a/w}) \\ F_{2a}F_{2b/w^2} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y_{1a}y_{1b} \\ \frac{1}{2}(y_{1a}F_{1b/w} + y_{1b}F_{1a/w}) \\ F_{1a}F_{1b/w^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } D = \begin{pmatrix} C_1^2 & 2C_1C_2 & C_2^2 \\ C_1C_3 & C_1C_4 + C_2C_3 & C_2C_4 \\ C_3^2 & 2C_3C_4 & C_4^2 \end{pmatrix}.$$

A chaque matrice B correspond une matrice D (qui en est une représentation), et au produit des matrices B correspond le produit des matrices D. Donc la matrice D correspondant à la barre entière est le produit des matrices D de chaque morceau:

$$D = D_1 D_2 \ldots D_n.$$

En outre, nous constatons que le carré de la norme choisie sur B est une norme sur D, parce que si la norme de B est nulle, cela implique que la matrice D est nulle, ce qui satisfait les axiomes définissant une norme.

Nous pouvons donc définir:

$$\|D\| = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2.$$

Nous désignerons par $\langle D \rangle$, la matrice dont les termes sont les valeurs moyennes des termes de D avec la mesure de probabilité correspondante.

Théorème. Si D_1 et D_2 sont deux matrices aléatoires indépendantes, on a [4]:

$$\langle D_1 D_2 \rangle = \langle D_1 \rangle \langle D_2 \rangle.$$

Corollaire. Si les matrices $D_1, D_2, \ldots D_n$, dont le produit est D, sont indépendantes et ont la même valeur moyenne $\langle D_1 \rangle$, on a:

$$\langle D \rangle = \langle D_1 \rangle^n.$$

Examinons la signification physique de cette condition d'indépendance qui est essentielle. Les matrices de deux tronçons contigus courts ne sont pas indépendantes en général, celles de tronçons longs sont indépendantes. On peut définir une certaine longueur de corrélation, telle que les matrices de tronçons contigus de longueur inférieure soient en général dépendantes, et celles de tronçons plus longs soient en général indépendantes. Dans le cas où la barre est formée de morceaux homogènes, si deux tronçons successifs ont la même longueur et appartiennent au même morceau homogène, leurs matrices sont égales, et ne sont donc pas indépendantes.

La longueur de corrélation est dans ce cas, liée à la longueur moyenne d'un morceau homogène.

Dans le présent travail, pour être certains que la condition d'indépendance soit satisfaite, nous avons choisi, comme tronçons définissant les matrices, des morceaux homogènes, successivement indépendants par hypothèse.

Les normes des deux membres de l'équation précédente sont égales:

$$\|\langle D\rangle\| = \|\langle D_1\rangle^n\|.$$

Le calcul de la norme de D est une opération linéaire qui comporte l'addition de quatre termes.

Le calcul de la valeur moyenne de D est une opération linéaire qui comporte le calcul d'une intégrale pour chaque terme. Ces deux opérations peuvent être exécutées successivement dans un ordre quelconque. La valeur moyenne de la norme est égale à la norme de la valeur moyenne, d'où:

$$\langle\|D\|\rangle^{1/n} = \|\langle D_1\rangle^n\|^{1/n}.$$

Définition

On appelle rayon spectral ρ_1 de la matrice $\langle D_1\rangle$ le plus grand des modules des valeurs propres.

Théorème

Lorsque le nombre n de matrices tend vers l'infini, on a:

$$\|\langle D_1\rangle^n\|^{1/n} \to \rho_1 \qquad [2]$$

Le théorème ci-dessus nous donne un moyen pratique de calculer

$$\langle\|D\|\rangle.$$

Définissons un coefficient α par:

$$\rho_1 = e^{2\alpha}.$$

Nous obtenons:

$$\langle\|D\|\rangle \to e^{2\alpha n}$$

ou:

$$\langle\|B\|^2\rangle \to e^{2\alpha n}.$$

Le coefficient α caractérise le taux moyen de croissance de la norme de la résolvante, c'est-à-dire l'amortissement de l'onde. On calcule ce coefficient à partir du rayon spectral de la matrice moyenne $\langle D_1\rangle$ correspondant à un morceau de barre. Il résulte des considérations antérieures que dans les hypothèses faites, le coefficient α est positif.

Données numériques

Nous avons fait le calcul numérique du coefficient d'amortissement moyen de deux façons différentes pour une série de valeurs de la fréquence w. D'une part, nous avons calculé le coefficient 2α à partir du rayon spectral de la matrice $\langle D_1 \rangle$. D'autre part, nous avons calculé le coefficient V_3 defini par $v_3 = \langle \log \|B\|^2 \rangle / 500$ à partir d'une statistique portant sur 30 barres tirées au sort suivant une mesure de probabilité définie de la façon suivante. Chaque barre comporte 500 morceaux homogènes tirés au sort indépendemment les uns des autres. Pour chaque morceau on tire au sort les coefficients kl et ρSv qui entrent dans la matrice B_1 définie par

$$B_1 = \begin{pmatrix} \cos kl & \dfrac{1}{\rho Sv} \sin kl \\ -\rho Sv \sin kl & \cos kl \end{pmatrix}.$$

Chacun de ces coefficients a une probabilité possédant une densité continue dans un certain intervalle, défini par les formules:

$$\begin{cases} \rho Sv = \sqrt{1 + \varepsilon \sin \varphi} \\ kl = w\sqrt{1 + \varepsilon \sin \varphi}\,(1 + \varepsilon \sin \theta) \end{cases}$$

où φ et θ sont des variables aléatoires dont la probabilité est définie par une densité uniforme dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Le coefficient ε caractérise l'amplitude des irrégularités des différents tronçons. Si la barre était homogène, on aurait $\varepsilon = 0$. Si ε atteignait 1, les irrégularités seraient si grandes que la masse spécifique pourrait s'annuler dans certains morceaux. On a pris dans les calculs numériques:

$$\varepsilon = 0, 8.$$

Les données ci-dessus sont relatives au cas d'une barre dont la section est constante,

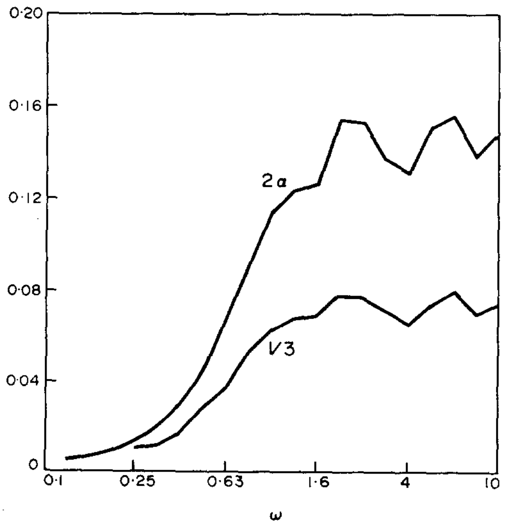

Fig. 2. 2α programme *VOC*, *V*3 programme *TONI*.

ainsi que le coefficient d'élasticité, mais dont la masse spécifique varie d'un morceau au suivant, ainsi que la longueur du morceau. Les ordinogrammes des deux programmes de calcul numériques sont donnés sur les Figs. 3 et 4.

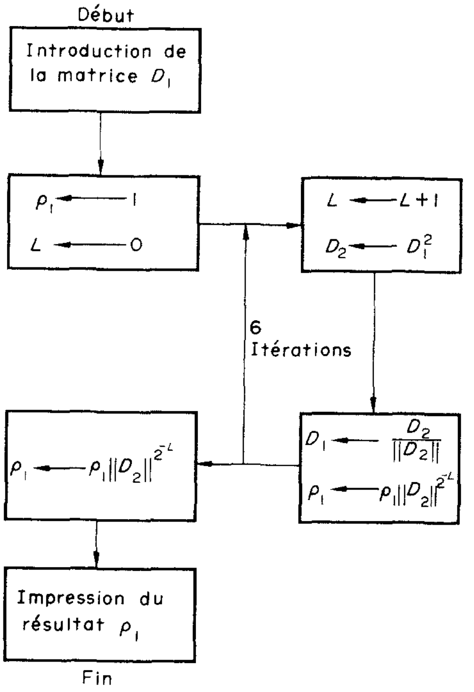

Fig. 3. Programme *VOC*. Calcul du rayon spectral ρ_1 d'une matrice D_1.

Calcul du rayon spectral d'une matrice (Fig. 3)

Ce calcul utilise la formule

$$\rho_1 = \lim_{n \to \infty} \| D_1^n \|^{1/n}$$

où nous écrivons pour alléger D_1 au lieu de $\langle D_1 \rangle$ et où ρ_1 est le rayon spectral de la matrice $\langle D_1 \rangle$.

Nous prenons $n = 2^L$ où L est un entier. Dans une boucle parcourue L fois, la matrice est élevée au carré, et la norme du résultat est calculée. On pourrait en déduire directement le rayon spectral, mais la norme augmente très vite avec L. Pour éviter de calculer avec des nombres trop grands, on divise chaque fois le carré matriciel obtenu par sa norme. Il faut alors compenser le résultat de cette opération en multipliant le rayon spectral par la quantité convenable.

Une suite d'itérations fournit alors pour le rayon spectral une suite de valeurs qui convergent vers une limite. On connaît la progression de cette suite, parce que la norme du carré matriciel tend lui-même vers une limite. On peut donc prévoir à chaque fois, la valeur de la limite du rayon spectral. En pratique, nous avons obtenu pour la limite du rayon spectral une valeur stable en six itérations seulement.

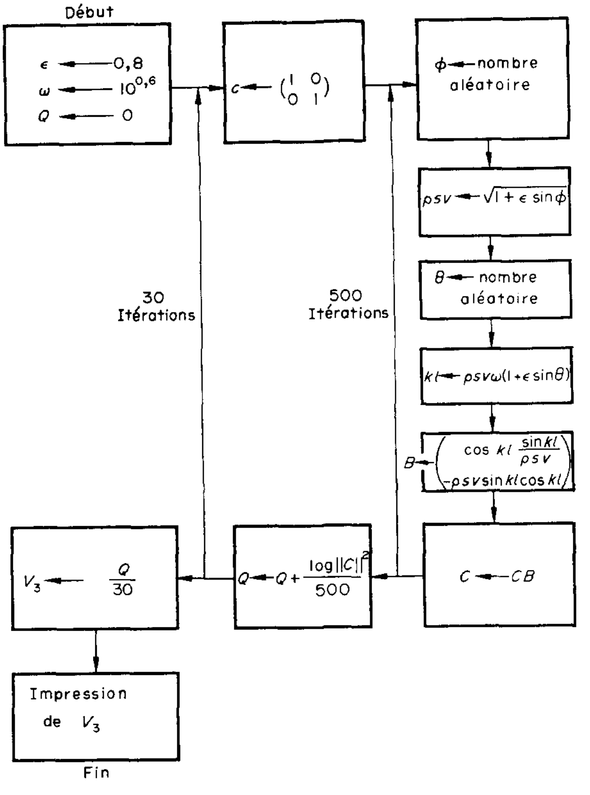

Fig. 4. Programme *TONI*. Calcul d'une statistique de produits de matrices aléatoires.

Calcul d'une statistique de produits de matrices aléatoires (Fig. 4)

On calcule la matrice d'un morceau homogène en calculant deux variables aléatoires φ et θ, puis les coefficients kl et ρSv.

Ce calcul est répété 500 fois, et par multiplication, on obtient la matrice d'une barre entière.

On recommence ce processus 30 fois, et on a ainsi les matrices de 30 barres entières, sur lesquelles on peut calculer la moyenne du coefficient d'amortissement.

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Les résultats des calculs numériques par les deux méthodes sont comparés sur les courbes de la Fig. 2.

En abcisse est portée la fréquence w.

En ordonnée, on a porté le coefficient d'amortissement 2α calculé à partir du rayon spectral, et la moyenne $V3$ du logarithme du carré de la norme d'un produit de 500 matrices, divisé par 500. Cette moyenne est calculée sur une statistique de 30 épreuves.

Les valeurs de $V3$ sont à peu près la moitié de celles de 2α, ce qui peut s'expliquer en calculant complètement la mesure de probabilité du coefficient d'amortissement. Ce sera l'objet d'un prochain article.

L'allure générale des deux courbes est la même, et présente des particularités intéressantes.

Lorsque le nombre de Kubo est inférieur à l'unité, le coefficient d'amortissement 2α est proportionnel à w^2, ce qui est en accord avec les résultats théoriques que l'on peut obtenir par des méthodes d'approximation (calcul des perturbations), qui ne sont valables que pour les petites valeurs du nombre de Kubo, alors que la méthode utilisée ici est valable pour toute valeur de ce nombre.

Lorsque le nombre de Kubo est supérieur à l'unité, le coefficient d'amortissement oscille irrégulièrement autour d'une valeur qui semble constante dans le domaine de fréquence que nous avons exploré.

On peut comparer grossièrement une barre aléatoire de longueur finie à un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure serait égale au nombre de Kubo.

CAS EXCEPTIONNELS

Une barre aléatoire de longueur finie peut servir d'élément pour constituer une barre périodique de longueur infinie. Le comportement de cette barre périodique est bien connu; elle possède des bandes passantes et des bandes d'arrêt.

Une bande passante correspond au cas où la matrice de la barre a des valeurs propres imaginaires conjuguées de module unité. Cela se produit lorsque la trace de la matrice est comprise entre -2 et $+2$.

Lorsqu'on allonge la barre en lui rajoutant des éléments, la trace (pour une fréquence donnée) oscille comme les termes de la matrice, avec une période égale à la longueur d'onde, entre des valeurs de signes contraires proportionnelles à la norme de la matrice. Un phénomène analogue se produit lorsqu'on fait varier la fréquence pour une barre de longueur donnée.

Il en résulte que la largeur d'une bande passante est inversement proportionnelle à la norme de la matrice. A la limite, lorsque la longueur de la barre aléatoire devient infinie, chaque bande passante se réduit à un point.

Si on choisit une fréquence au hasard, on a une probabilité nulle pour qu'elle soit dans une bande passante, et une probabilité unité pour qu'elle soit dans une bande d'arrêt, avec le coefficient moyen d'amortissement calculé plus haut.

Mais on peut toujours déterminer la fréquence de façon à ce qu'elle soit dans une bande passante.

De même les oscillations libres du système existent et ont des propriétés intéressantes [5]. Or si la fréquence d'excitation est une fréquence propre, l'amplitude de l'extrémité libre peut être grande par rapport à celle de l'extrémité excitée. Mais ce résultat ne contredit pas ceux que nous avons obtenus, car il n'est vrai que pour l'ensemble de barres (de probabilité nulle) dont une fréquence propre coïncide avec la fréquence d'excitation donnée.

CONCLUSION

Nous avons étudié la propagation d'une onde acoustique longitudinale harmonique dans un guide aléatoire conservatif. La méthode de calcul utilisée, ainsi que certaines particularités des résultats sont transposables à des problèmes analogues sous des hypothèses beaucoup plus larges, dans de nombreux domaines de la physique (ondes électromagnétiques, mécanique quantique).

Nous trouvons qu'il y a un amortissement statistique moyen de l'onde à partir de l'extrémité excitée du guide, et nous savons calculer le coefficient d'amortissement, dans le cas d'un guide homogène par morceaux. Cet amortissement ne contredit pas le caractère conservatif du guide d'ondes, car l'énergie de la source d'excitation ne pénètre pas dans le guide: l'onde est réfléchie vers la source.

Lorsque le nombre de Kubo est inférieur à l'unité, le coefficient d'amortissement est proportionnel au carré de la fréquence. Lorsque le nombre de Kubo est supérieur à l'unité, le coefficient d'amortissement reste voisin d'une valeur indépendante de la fréquence.

REFERENCES

1. A. Brissaud et U. Frisch, *Solving Linear Differential Equations*, preprint (1972).
2. J. Dieudonné, *Eléments d'Analyse*, tome 2, pp. 247, 279. Gauthier-Villars, Paris (1968).
3. H. Weyl, *The Classical Groups, Their Invariants and Representations*, Chap. 4, p. 115. Princeton University Press (1946).
4. U. Grenander, *Probabilities on Algebraic Structures*, p. 168. Almqvist & Wiksell, Stockholm, (1968).
5. P. Dean, *The Vibrational Properties of Disordered Systems*, Reviews of Modern Physics, Vol. 44, no. 2 (April 1972).

Резюме — Гармонические продольные акустические волны распространяются через тонкие упругие прутки, упругая постоянная, плотность и сечения которых являются случайными функциями расстояния по оси до точки возбуждения. Частичное отражение на последовательных неоднородностях понижает среднюю амплитуду волн по экспоненциальному закону от точки возбуждения. Дается метод расчета среднего коэффициента демпфирования, и результаты сравниваются с численными искусственными воспроизведениями моделирования.